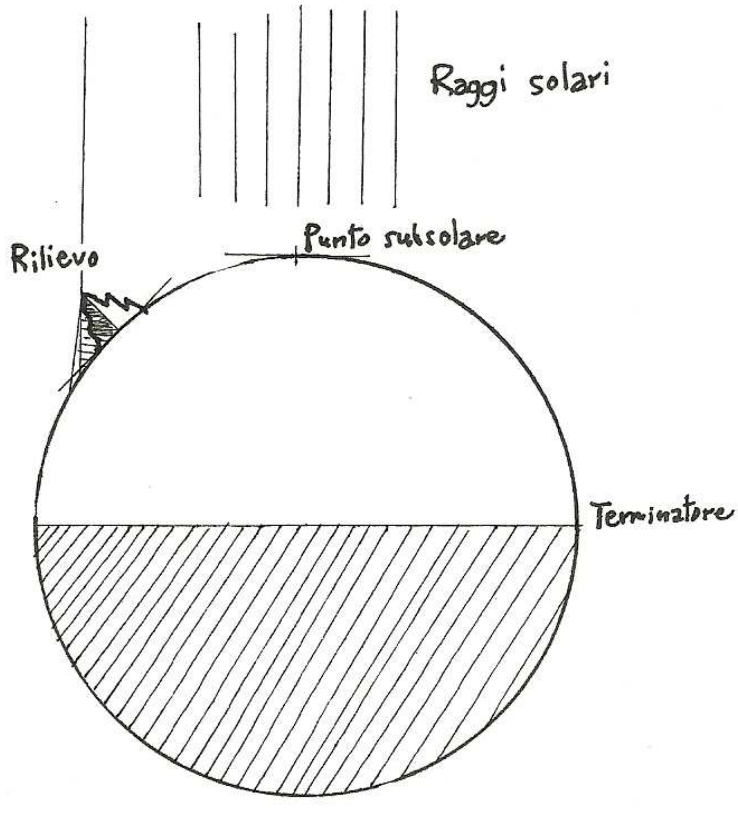
Relazione finale al POF Luna 2010-11	
Liceo Scientifico "G. Carducci"	***Classe V sez. B***
Autori: Andrea Favilli, Giuseppe Cambria, Andrea Presenti, Daniele Capuano	

"Calcolo dell'altezza di un rilievo lunare: l'esempio di Arzachel"

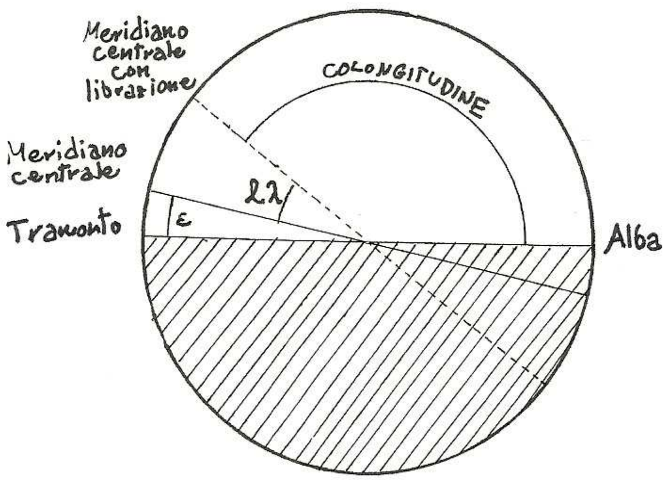
Lo scopo della suddetta esperienza è il calcolo dell'altezza di un particolare rilievo lunare, scelto appositamente per la conformazione pianeggiante del terreno circostante, conoscendo la lunghezza (misurata dapprima in pixel) dell'ombra che esso proietta sul suo stesso fianco oscurato e sul terreno.
Si tratta di un'interessante applicazione della trigonometria, tenendo conto allo stesso tempo di numerosi concetti astronomici e ricorrendo a software specifici del settore.
Prima di procedere con l'illustrazione di tale procedimento è tuttavia necessario introdurre alcuni fondamentali concetti (per un chiarimento più esaustivo si osservino le immagini seguenti).



La linea immaginaria che separa le aree illuminate dai raggi solari dalle aree non illuminate è detta **terminatore**.
Al contrario, il punto nel quale i raggi solari cadono esattamente ortogonali è denominato **punto subsolare**.
Osservando il rilievo da un qualsiasi punto di vista noteremo che l'ombra inizierà dalla sommità del monte stesso per estendersi sul terreno: non è ovviamente possibile distinguere la parte di ombra appartenente al fianco del monte dall'ombra portata sul terreno, è tuttavia possibile pensare questa unica ombra come l'ipotenusa di un particolare triangolo rettangolo. Tale triangolo ha come cateti l'altezza stessa del monte (il risultato finale della nostra esperienza) e la lunghezza effettiva dell'ombra sul terreno.
L'ombra assume una lunghezza maggiore man mano che ci si avvicina al terminatore (e ci si allontana pertanto dal punto subsolare): la lunghezza dell'ombra è dunque influenzata sia dalla latitudine che dalla longitudine.
Aggiungiamo adesso una precisazione di natura metrica: se osserviamo la luna da una direzione perpendicolare a quella dei raggi solari vediamo le ombre nelle loro dimensioni reali, nel caso contrario saranno necessarie opportune correzioni, tanto maggiori quanto noi ci allontaniamo da tale condizione di perpendicolarità.
Per poter stabilire con certezza tale indice di correzione è necessario tener conto di due importanti principi: l'angolo di **colongitudine** e la **librazione in longitudine**.
Per colongitudine si intende la distanza angolare tra il meridiano centrale e il terminatore nel punto di alba lunare. Tale valore è misurato in gradi, a partire dal meridiano centrale verso ovest.
La colongitudine (κ) non è in grado di dare la posizione esatta del meridiano centrale, in quanto è necessario considerare anche il problema della librazione, diretta conseguenza della velocità di rivoluzione lunare non costante (II legge di Keplero). Con il manifestarsi di tale fenomeno si viene a creare una sorta di sfasamento (indicato con l'angolo $l\lambda$) tra l'angolo di rivoluzione attorno alla Terra e l'angolo di rotazione compiuto nello stesso istante di tempo.
La posizione esatta del meridiano centrale a partire dal tramonto lunare (ε) è dunque data dalla seguente relazione:

$$\varepsilon = 180° - \kappa - l\lambda$$

La figura seguente schematizza il passaggio.



Adesso che abbiamo individuato la posizione del meridiano centrale rispetto al terminatore possiamo procedere con i primi calcoli. Il rilievo da noi scelto è denominato Arzachel: con un apposito atlante multimediale abbiamo individuato i dati necessari all'esperienza, di seguito riportati nella tabella.

Dato:	**Valore:**
Data e ora fotografia	25/09/2005 04.27 UT
Dimensioni angolari apparenti disco lunare	d = 30,47' = 1828,2''
Diametro luna	D = 3476 Km
Colongitudine	κ = 173,5°
Librazione in longitudine	lλ = 5° 37'
Campionamento immagine	C = 0,11''
Latitudine punto subsolare	Φs = 0,3°
Coordinate montagna	Lat. = 18,2° S Long.= 1,9° O

A questo punto manca ancora una dato essenziale: la lunghezza effettiva dell'ombra proiettata da Arzachel. Individueremo dapprima tale dato sottoforma del numero di pixel che separano nella foto la cima della montagna dalla fine dell'ombra alla base, in seguito convertiremo tale valore in Km.
Ma vediamo nel dettaglio come si è potuto fare tutto questo. Anzitutto per la misurazione dei pixel abbiamo utilizzato un particolare software, denominato ImageJ, mentre per convertire tale valore in un'unità metrica abbiamo tenuto conto del **campionamento** dell'immagine, valore dipendente dal tipo di telescopio e dunque dal set ottico utilizzato.
Si è dunque impostata la suddetta proporzione, individuando a quanti Km corrisponde il singolo pixel (ς). (Per comprendere la simbologia utilizzata nella proporzione seguente si osservi la precedente tabella)

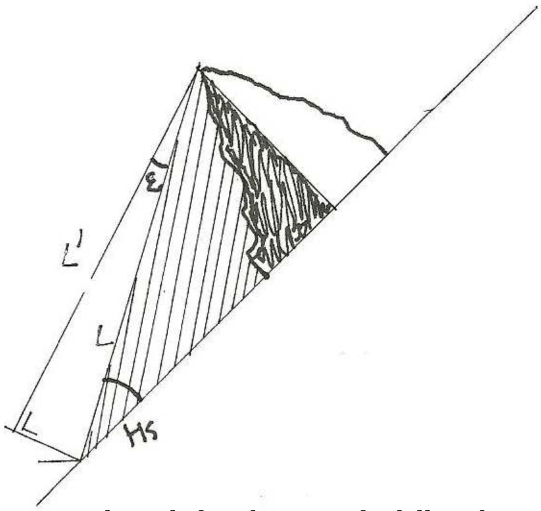
$$d : D = C : \varsigma$$

Effettuiamo dunque i calcoli sulla base dei dati del nostro rilievo.

$1828{,}2'' : 3476\ Km = 0{,}11'' : \varsigma \quad \Rightarrow \quad \varsigma = \frac{3476 \cdot 0{,}11}{1828{,}2} = 0{,}209\ {}^{Km}/_{pixel}$

Dopo aver effettuato la misurazione dell'ombra attraverso ImageJ (numero pixel: 52), moltiplichiamo il numero dei pixel per il valore ς precedentemente ottenuto: in tale modo troviamo la lunghezza apparente dell'ombra espressa in Km (L').

$L' = n \cdot \varsigma \Rightarrow L' = 0{,}209 \cdot 52 = 10{,}868\ Km$



Vediamo adesso come trovare la misura reale L dell'ombra a partire dal risultato L' precedentemente ottenuto.
Si osservi l'immagine a sinistra: come possiamo vedere, per trovare il valore L occorre una semplice applicazione trigonometrica. Ma prima è necessario ricavare l'angolo di correzione ε con il metodo precedentemente mostrato.

$$\varepsilon = 180° - \kappa - l\lambda$$

e dunque,

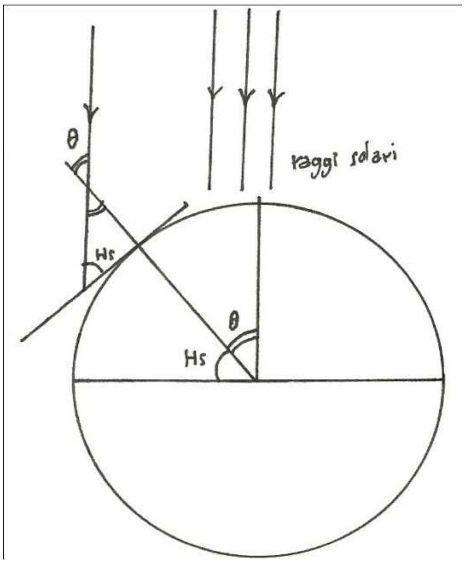
$$\varepsilon = 180° - 173{,}5° - 5{,}62° = 0{,}88°$$

Come mostra il presente risultato il fattore dei conversione è veramente minimo.

Troviamo adesso la lunghezza reale dell'ombra:

$$L = \frac{L\prime}{cos\varepsilon} \qquad \Rightarrow \quad L = \frac{10{,}868}{\cos 0{,}88°} = 10{,}869\ Km$$

Adesso per calcolare l'altezza del monte l'operazione appare piuttosto semplice, ma occorre conoscere l'angolo H_s o il suo complementare.
Come mostra l'immagine sottostante, l'angolo H_s è complementare alla distanza angolare θ compresa tra il punto subsolare e il rilievo stesso.



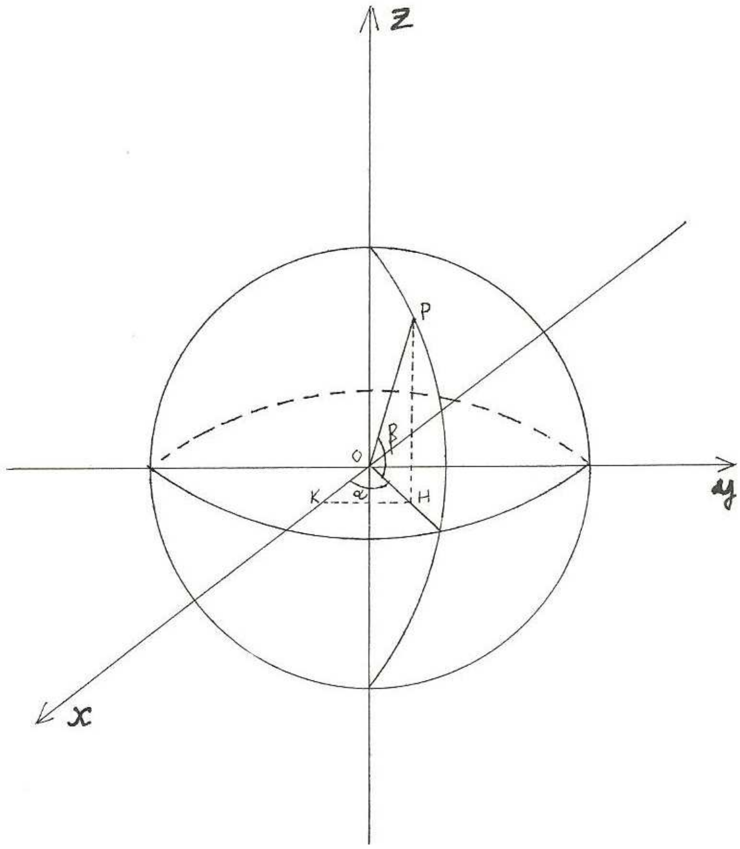
Il coseno della distanza angolare θ può essere calcolato mediante questa formula.

$$cos\theta = \cos(\alpha_1 - \alpha_2)\, cos\beta_1 cos\beta_2 + sin\beta_1 sin\beta_2$$

Dove $\alpha_1 e\ \beta_1$ sono rispettivamente la longitudine e la latitudine del punto subsolare e $\alpha_2 e\ \beta_2$ sono le coordinate del rilievo.
Essendo il punto subsolare sempre perpendicolare al terminatore, potremo facilmente calcolare la sua longitudine α_1.

$$\alpha_1 = |90° - \kappa| \Rightarrow \alpha_1 = |90° - 173{,}5°| = 83{,}5°\ O$$

Dimostriamo adesso la formula scritta ad inizio pagina. Per tale scopo si consideri una sfera di raggio unitario, come quella rappresentata nell'immagine seguente. Si consideri su di essa un punto P.



Il vettore $\overrightarrow{OP}$, essendo definito in uno spazio a tre dimensioni, avrà tre componenti, ciascuna corrispondente ad un asse cartesiano. Calcoliamo tali componenti considerando che $|OP|$=1.

$$OH = OP\ cos\beta = cos\beta$$

$$\vec{x} = OK = OH\ cos\alpha = cos\beta\ cos\alpha$$

$$\vec{y} = HK = OH\ sin\alpha = cos\beta\ sin\alpha$$

$$\vec{z} = PH = OP\ sin\beta = sin\beta$$

Le componenti del vettore $\overrightarrow{OP}$ sono pertanto le seguenti:

$\overrightarrow{OP}(cos\alpha\ cos\beta, sin\alpha\ cos\beta, sin\beta)$

Prendendo un punto Q analogo sulla stessa sfera ed eseguendo le stesse operazioni avremo.

$\overrightarrow{OP}(cos\alpha 1\ cos\beta 1, sin\alpha 1\ cos\beta 1, sin\beta 1)$

$\overrightarrow{OQ}(cos\alpha 2\ cos\beta 2, sin\alpha 2\ cos\beta 2, sin\beta 2)$

Il coseno della distanza angolare tra P e Q è dato dal prodotto scalare dei due vettori diviso il prodotto dei loro moduli, nel nostro caso 1. Avremo perciò la seguente formula, ovvero la stessa formula scritta all'inizio della pagina precedente

$cos\theta = \cos(\alpha_1 - \alpha_2)\ cos\beta_1 cos\beta_2 + sin\beta_1 sin\beta_2$

Concludiamo adesso l'esperienza, avendo a disposizione tutti i dati necessari. Sostituiamo i valori richiesti e troviamo il coseno della distanza angolare.

$cos\theta = \cos(-83{,}5 + 1{,}9)\cos(0{,}3)\cos(-18{,}2) + sin\ (0{,}3)sin(-18{,}2) =$
$= \cos(-81{,}6)\cos(0{,}3)\cos(-18{,}2) + sin(0{,}3)sin(-18{,}2) =$
$= 0{,}146 \cdot 0{,}999 \cdot 0{,}949 + 0{,}0052 \cdot (-0{,}312) =$
$= 0{,}138 - 0{,}0016 =$
$= 0{,}1364$

Adesso è possibile conoscere l'altezza di Arzachel, mediante le normali relazioni della trigonometria.

$$h = L\ cos\theta \quad \Rightarrow\ h = 10{,}869 \cdot 0{,}1364 = 1{,}4825316Km \cong 1482{,}5\ m$$

Il valore ottenuto ci fornisce l'altezza del rilievo con una discreta precisione: tale valore può tuttavia essere influenzato da un'errata misurazione dei pixel o dalla qualità stessa del set ottico.