

PROCEDURA PER IL CALCOLO DELLE ALTEZZE DELLE MONTAGNE LUNARI CON IL METODO DELLA MISURAZIONE DELLE OMBRE.

L.I.N.E.A.R.I.S. Laboratorio Interdisciplinare per L'Educazione all'Astronomia e Ricerca Scientifica - Responsabile

Alessandro Rosselli

Progetto: Alessandro Rosselli, Riccardo Particelli, Enzo Bartalini

L'esperienza è composta da tre fasi.

1° FASE

Vengono spiegati agli studenti i concetti e le terminologie necessarie per lo svolgimento dell'esercitazione.

Disposizione delle ombre sulla superficie lunare, terminatore, punto subsolare, condizione di perpendicolarità, colongitudine, librazione in longitudine,

Quando osserviamo la Luna, riusciamo a vedere i profili delle montagne e dei crateri grazie alle ombre proiettate sulla superficie. Dobbiamo quindi osservare nei momenti di fase lunare quando è ben distinguibile il **terminatore**, cioè la zona di separazione tra giorno e notte. In questo caso infatti, nei pressi del terminatore, saranno evidenti le caratteristiche del tormentato suolo lunare.

In queste condizioni, osservando un rilievo, vedremo la sua ombra partire dalla sommità e stendersi sul terreno. Potremo considerare l'ombra come l'ipotenusa di un triangolo rettangolo, avente per base la lunghezza dell'ombra che si stende sul terreno e per altezza l'altezza della montagna, come si può vedere dal disegno 1.

Su una sfera, illuminata da una fonte di luce proveniente da molto lontano, le ombre si dispongono sulla superficie lungo i cerchi massimi passanti tra il **punto subsolare** (punto nel quale i raggi luminosi cadono perfettamente a picco, posizionato esattamente al centro dell'emisfero illuminato) e il punto in misura. Ma la direzione lungo la quale dovrà essere misurata l'ombra, che va dalla sommità della montagna sino alla fine dell'ombra al suolo, è sempre la stessa, quella dei raggi solari, per qualsiasi luogo della Luna. Naturalmente va scelto un luogo dove sia abbastanza agevole prendere la misura e dove il terreno sia abbastanza regolare per non causare distorsioni sulla direzione e lunghezza dell'ombra.

Da quanto sopra detto deriva che se la direzione del nostro sguardo è perpendicolare alla direzione dei raggi solari noi misureremo sempre una lunghezza reale dell'ombra , in qualsiasi posizione, visualmente agibile, si trovi il rilievo. Invece se questo non

perpendicolarità.

Dovremo quindi conoscere l'angolo che ci separa da questa condizione, il quale ci permetterà di calcolare la lunghezza reale dell'ombra.

Come si vede dal disegno 1, questo angolo chiamato ϵ , dipende sia dalla colongitudine Col che dalla librazione in longitudine λ .

La **colongitudine** è definita come la posizione del terminatore, sull'alba lunare, misurata verso Ovest da 0° a 360° , partendo dal meridiano centrale.

Tenere presente che il meridiano di riferimento cioè 0 è quello che in assenza di librazione è normale ad un osservatore sulla terra, vedremo poi cosa è la librazione.

La Luna ruota intorno al proprio asse, compiendo un giro nel medesimo tempo impiegato per compiere una rivoluzione intorno alla Terra. Entrambe i movimenti sono in senso antiorario, se visti dal polo nord del sistema.

La **librazione in longitudine** dipende dal fatto che mentre la Luna ha una velocità di rotazione costante intorno al proprio asse non ha invece una velocità di rivoluzione costante intorno alla Terra. L'orbita della Luna è infatti un'ellisse, quindi la sua distanza dalla Terra varia da un minimo, perigeo, ad un massimo, apogeo. Quando la Luna è più vicina alla Terra essa si muove più velocemente mentre rallenta quando è più lontana. Quindi, nel primo caso, la rotazione sarà in leggero ritardo rispetto alla rivoluzione e noi potremo vedere un poco di più la parte Est. Nel secondo caso invece la rotazione sarà in anticipo sulla rivoluzione e noi potremo vedere poco di più della parte Ovest.

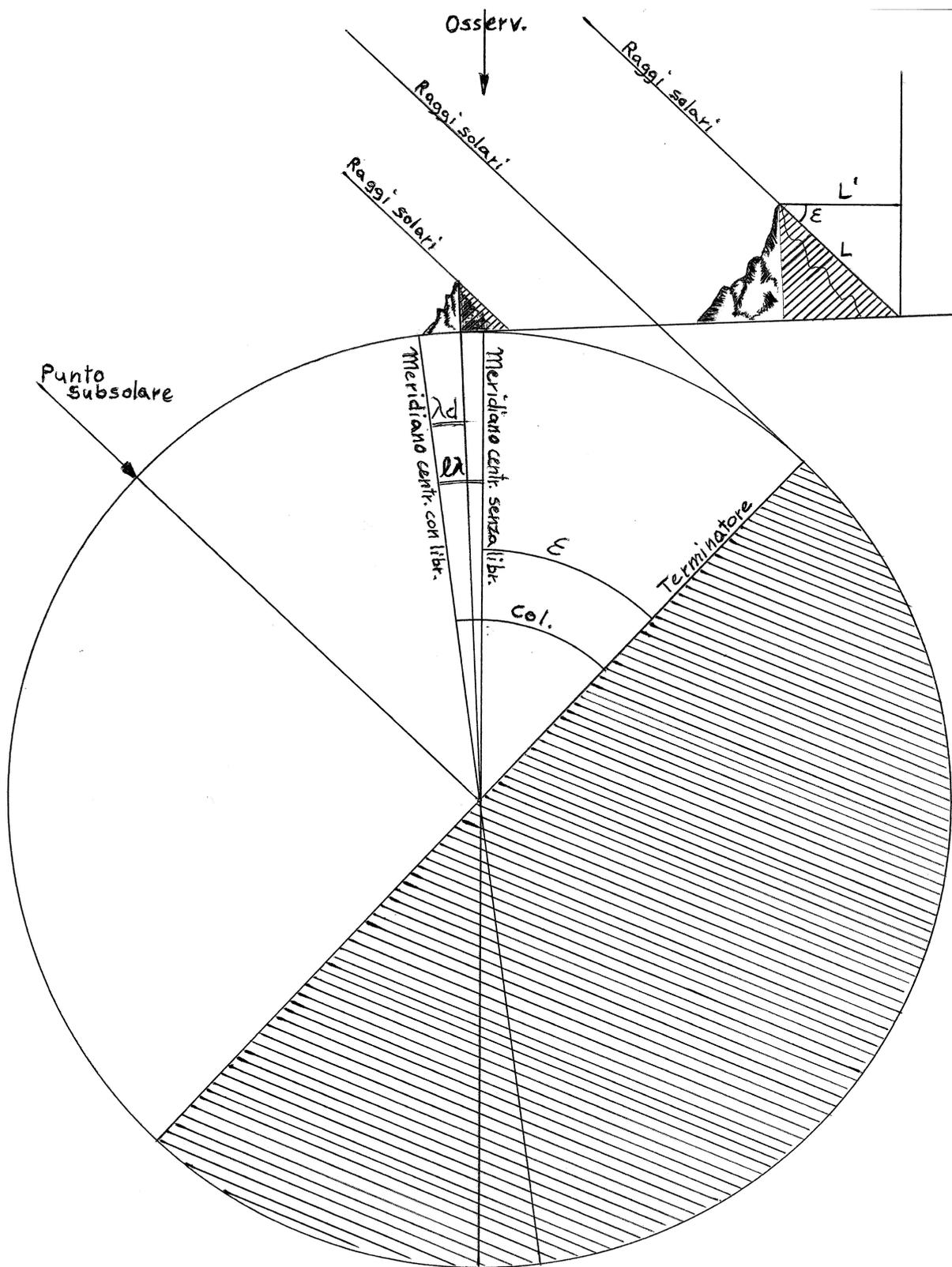
Le moderne macchine fotografiche digitali hanno, al posto della vecchia pellicola, un sensore formato da tante piccolissime singole unità disposte come i quadretti su una pagina di quaderno. Esse hanno la proprietà di assumere una carica elettrica proporzionale alla quantità di energia luminosa che le colpisce.

Successivamente allo scatto della foto queste unità vengono lette, una per una, ed in base ai valori raccolti è possibile, punto per punto, ricostruire l'immagine. Queste unità si chiamano **pixels**. Ogni pixel raccoglie quindi una parte dell'intero campo della foto. Vedremo nella seconda fase quale è la proporzionalità tra questo e la reale porzione di suolo lunare.

II FASE

Raccolta dati, misurazione dell'ombra in pixel e conversione in Km, correzione dell'errore di perpendicolarità.

I dati necessari per svolgere l'esercitazione vengono ricavati dal programma Virtual Moon Atlas, altri sono caratteristici dell'attrezzatura utilizzata ed in fine la dimensione dell'ombra misurata in pixels.



Tav. 1

III FASE

Angolo di incidenza dei raggi solari sulla superficie lunare nel luogo della formazione, il quale serve, dato che conosciamo la lunghezza dell'ombra, a ricavare l'altezza della montagna.

Concetto per il quale viene applicata la formula di trigonometria sferica.

Nel disegno 1, per semplicità la montagna è disegnata sull'equatore. Se così fosse lavorando con gli angoli Col e longitudine della montagna λ_d , sarebbe semplice ricavare l'angolo di incidenza dei raggi solari H_s . Risulterebbe infatti

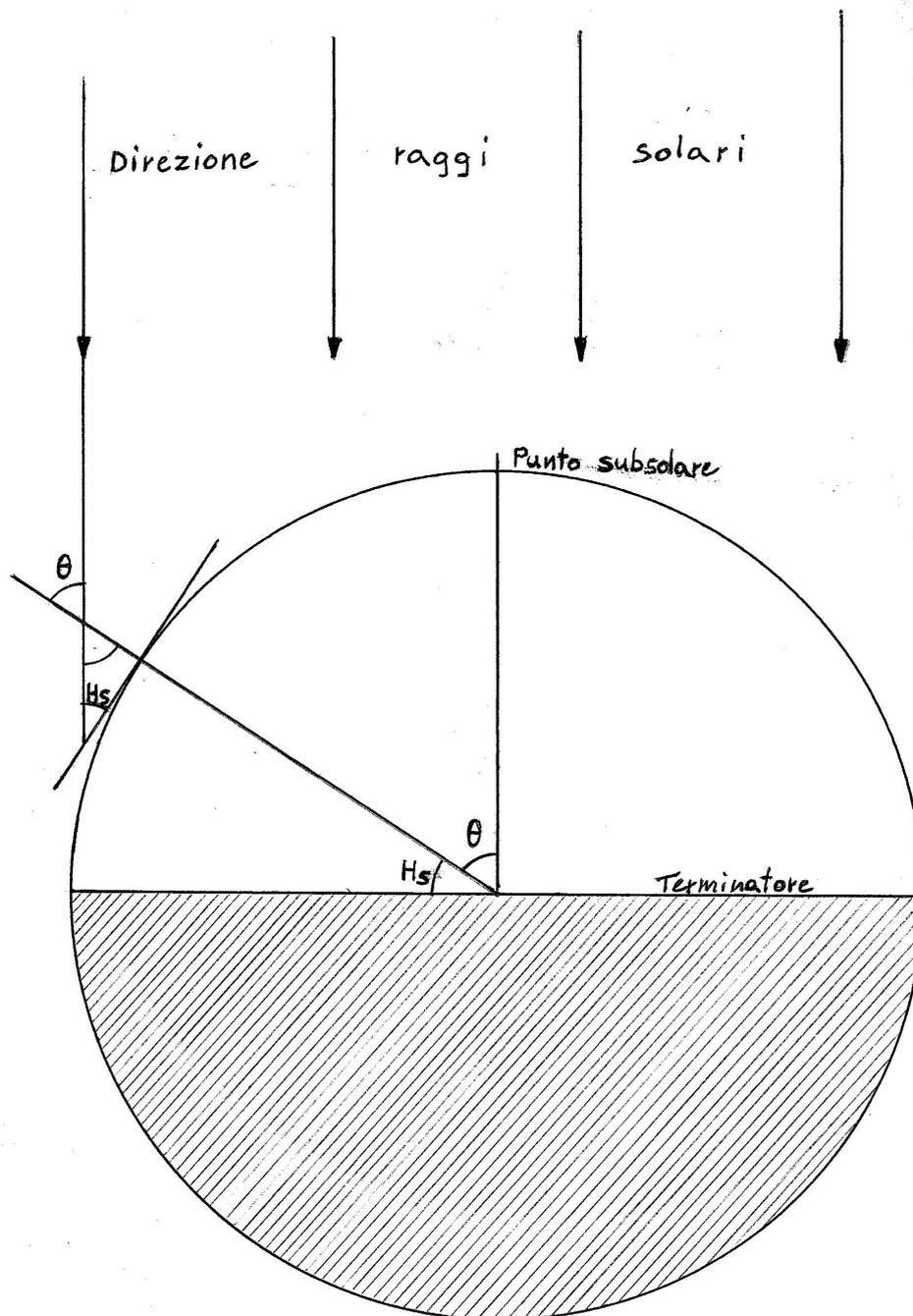
$$H_s = - Col + \lambda_d$$

Ma la montagna in realtà non è sull'equatore e quindi l'angolo di incidenza dei raggi solari non dipende solo dalla longitudine ma anche dalla latitudine.

In effetti tale angolo dipende dalla distanza dal terminatore. Se ci spostiamo solo in longitudine l'ombra diventa sempre più lunga man mano ci avviciniamo al terminatore.

Se invece ci spostiamo solo in latitudine l'ombra diventa sempre più lunga avvicinandoci ai poli, perché così facendo ci avviciniamo comunque al terminatore.

Per trovare tale angolo dovremo quindi utilizzare una formula che tenga conto sia della latitudine che della longitudine.



Tav. 2

Riferendosi al disegno 2 si può dire che:

l'angolo di incidenza dei raggi solari nel punto in esame (H_s), è l'angolo complementare della distanza angolare (θ), tra il punto subsolare ed il punto in misura, rilevata lungo il circolo massimo passante tra questi due punti.

La seguente formula di trigonometria ci permette di ricavare il coseno dell'angolo θ in funzione delle coordinate selenografiche del punto subsolare e della formazione.

$$\cos \theta = \cos (\lambda_s - \lambda_d) \times \cos \varphi_s \cos \varphi_d + \sin \varphi_s \sin \varphi_d$$

La longitudine del punto subsolare λ_s , non viene fornita direttamente, ma è possibile ricavarla sapendo che il punto subsolare si trova sempre, ovviamente, a 90° dal terminatore, tenere presente che la colongitudine si misura dal meridiano 0 verso ovest quindi è una grandezza negativa.

$$\lambda_s = 90^\circ - Col$$

Bisogna fare attenzione ai segni in base alle latitudini e longitudini, tenendo presente che Lat. Sud è negativa così come Long. Ovest.

Ed infine si ricava l'altezza della montagna con la

$$H = L \times \cos \theta$$

DIMOSTRAZIONE FORMULA TRIGONOMETRIA SFERICA

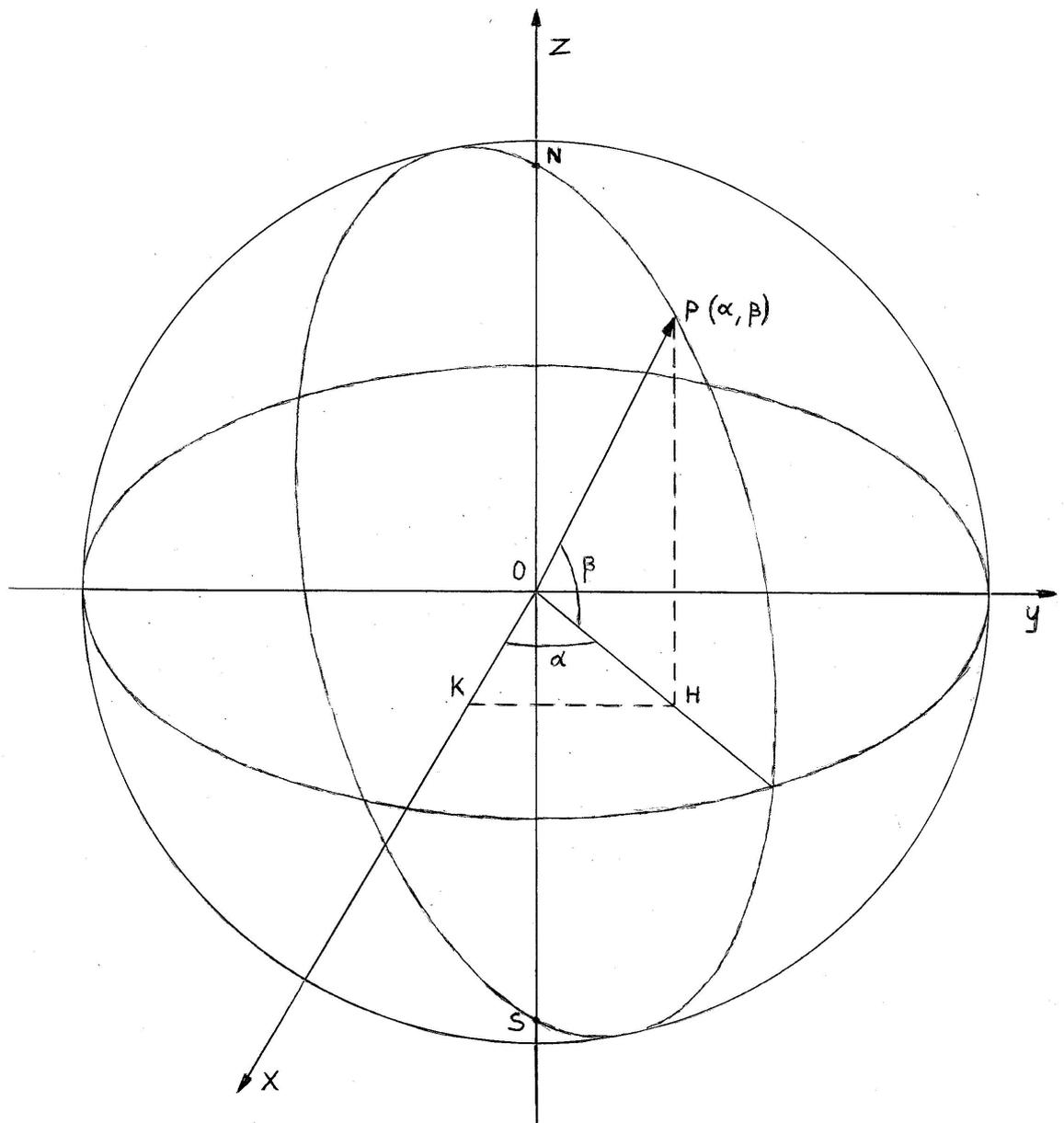
Prendendo come riferimento il disegno 3 dove è raffigurata una sfera con raggio unitario, possiamo considerare il raggio che unisce il centro ad un punto P sulla superficie della sfera, come ad un vettore identificato da tre componenti cartesiane riferite ad un sistema tridimensionale X, Y, Z.

Queste componenti cartesiane possono essere ricavate usando la trigonometria Possiamo cioè scrivere, ricordando che il raggio della sfera è considerato uguale a 1

$$OH = \cos \beta$$

$$OK = \cos \alpha \times OH \quad \text{ovvero}$$

$$OK = \cos \alpha \cos \beta$$



Ma OK corrisponde alla coordinata X, quindi

$$X = OK = \cos\alpha \cos\beta$$

Nello stesso modo si procede per le altre coordinate

$$Y = HK = \sin\alpha \cos\beta$$

$$Z = HP = \sin\beta$$

infine

$$Z = HP = \sin\beta$$

Quindi il vettore OP può essere identificato dalla seguente relazione

$$OP = (\cos\alpha \cos\beta, \sin\alpha \cos\beta, \sin\beta)$$

Notare che gli angoli α e β rappresentano rispettivamente la longitudine e la latitudine del punto P.

Se prendiamo un altro vettore, ad esempio OQ, definito anch'esso da tre componenti cartesiane, dal calcolo vettoriale si ha

$$\cos (OP, OQ) = OP \cdot OQ / |OP| \times |OQ|$$

Cioè il coseno della distanza angolare tra i due vettori è uguale al prodotto scalare dei vettori diviso il prodotto dei loro moduli. Ma i moduli hanno valore unitario per cui il loro prodotto è uguale a 1. Quindi chiamando α_1 e β_1 gli angoli di longitudine e latitudine del punto P e α_2 e β_2 quelli del punto Q e mettendo il $\cos (OP, OQ) = \cos \theta$, si avrà

$$\cos \theta = (\cos\alpha_1 \cos\beta_1, \sin\alpha_1 \cos\beta_1, \sin\beta_1) \cdot (\cos\alpha_2 \cos\beta_2, \sin\alpha_2 \cos\beta_2, \sin\beta_2)$$

Ma facciamo un passo indietro e proviamo ad eseguire la moltiplicazione tra questi due trinomi considerando i vettori rappresentati dalle componenti cartesiane X, Y, Z.

Ricordiamo anche che il prodotto tra due vettori si esegue moltiplicando il modulo del primo per la proiezione del secondo sul primo. Quindi se i vettori sono tra loro ortogonali il prodotto è 0, perché la proiezione del secondo sul primo è nulla

$$\cos \theta = (X_1 + Y_1 + Z_1) \cdot (X_2 + Y_2 + Z_2)$$

$$\cos \theta = X_1 X_2 + X_1 Y_2 + X_1 Z_2 + Y_1 X_2 + Y_1 Y_2 + Y_1 Z_2 + Z_1 X_2 + Z_1 Y_2 + Z_1 Z_2$$

il prodotto scalare tra coordinate ortogonali (versori fondamentali) si annulla quindi:

$$X_1 Y_2, X_1 Z_2, Y_1 X_2, Y_1 Z_2, Z_1 X_2, Z_1 Y_2$$

e rimane

$$\cos \theta = X_1 X_2 + Y_1 Y_2 + Z_1 Z_2$$

ritornando alla rappresentazione trigonometrica e facendo le dovute sostituzioni si avrà

$$\cos \theta = \cos \alpha_1 \cos \beta_1 \times \cos \alpha_2 \cos \beta_2 + \sin \alpha_1 \cos \beta_1 \times \sin \alpha_2 \cos \beta_2 + \sin \beta_1 \sin \beta_2$$

mettendo in evidenza $\cos \beta_1 \times \cos \beta_2$

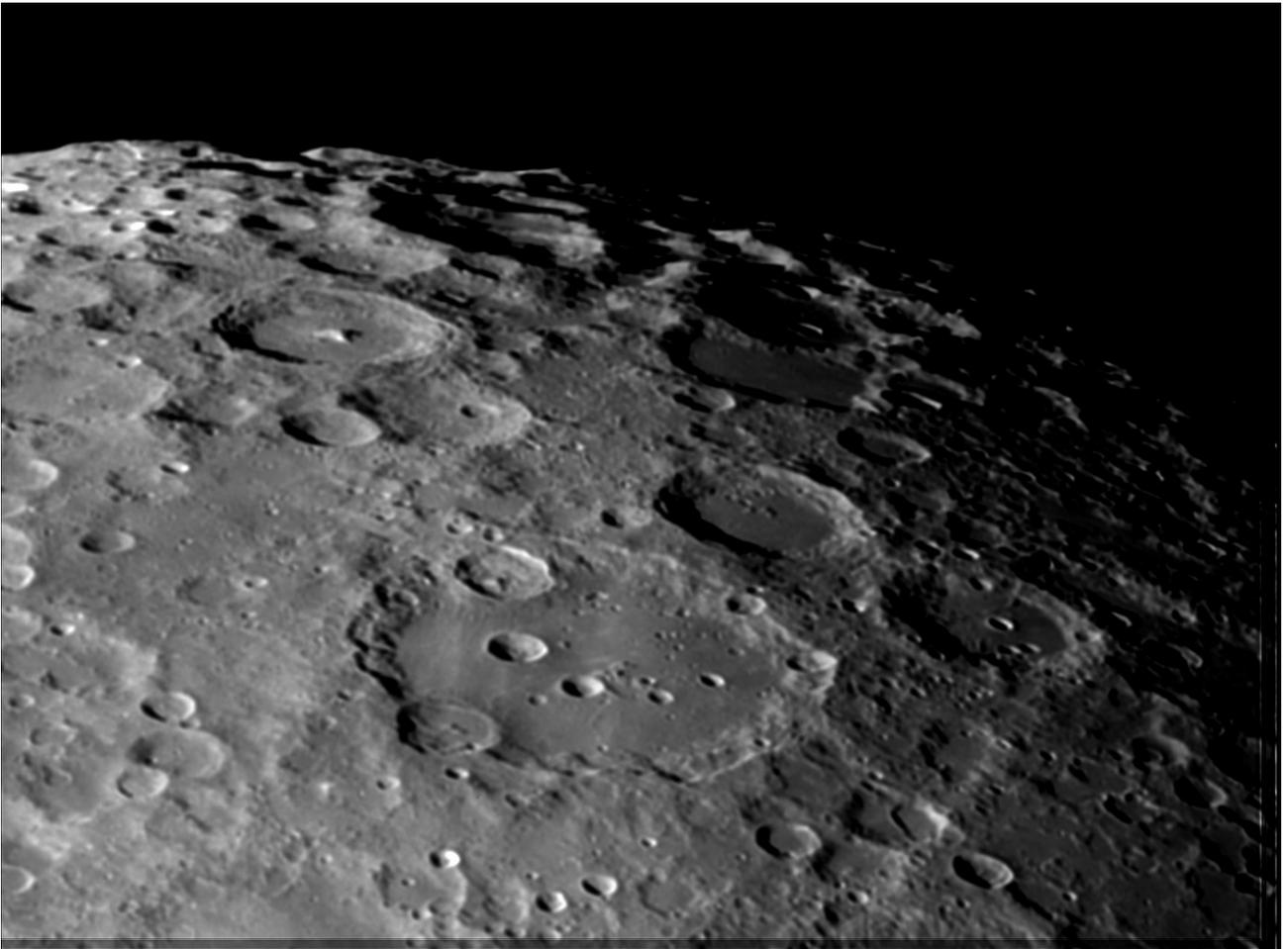
$$\cos \theta = (\cos \alpha_1 \times \cos \alpha_2 + \sin \alpha_1 \times \sin \alpha_2) \times \cos \beta_1 \times \cos \beta_2 + \sin \beta_1 \times \sin \beta_2$$

essendo, dalle regole della trigonometria

$$(\cos \alpha_1 \times \cos \alpha_2 + \sin \alpha_1 \times \sin \alpha_2) = \cos (\alpha_1 - \alpha_2)$$

possiamo scrivere

$$\cos \theta = \cos (\alpha_1 - \alpha_2) \times \cos \beta_1 \times \cos \beta_2 + \sin \beta_1 \times \sin \beta_2$$



Da Clavius a Moretus Crater
Foto di Riccardo Particelli