Marco Monaci

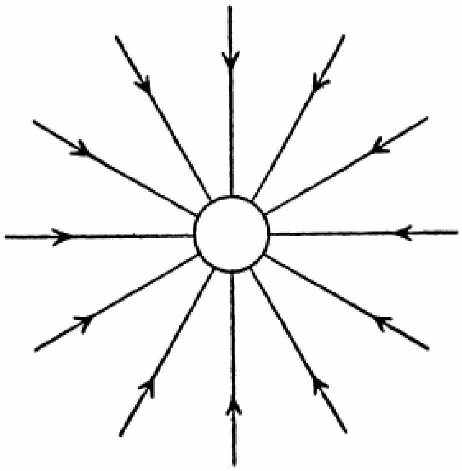
PUNTI DI LAGRANGE E LINEE EQUIPOTENZIALI

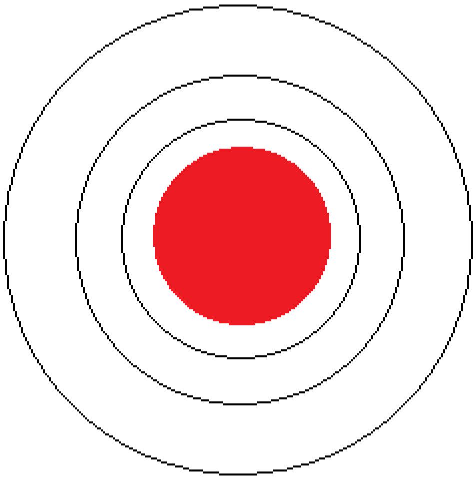
Partiamo definendo la forza gravitazionale agente su un punto nello spazio, quando il campo gravitazionale è generato da un punto o, equivalentemente, da una massa sferica, come può essere il Sole o la Terra.

$$F = G\frac{Mm}{r^2}\hat{r}$$

Dove con $\hat{r}$ abbiamo indicato il versore congiungente i due corpi. Si tratta quindi di un campo di forze *centrale*: in altre parole il campo possiede linee di forza dirette radialmente verso il corpo (il "centro" del problema!).

E' chiaro che la forza dipende esclusivamente dalla distanza dal corpo, avendo il campo simmetria sferica (la forza che risento è la stessa a 1000 km sopra il Polo Nord che a 1000 km sopra il Polo Sud, sento forze diverse se mi avvicino o mi allontano). Nella figura qui a fianco possiamo vedere rappresentate le linee di forza. Se noi lasciamo un satellite libero di muoversi (senza velocità iniziale) seguirà una delle linee di forza finendo per schiantarsi sulla superficie del corpo maggiore.





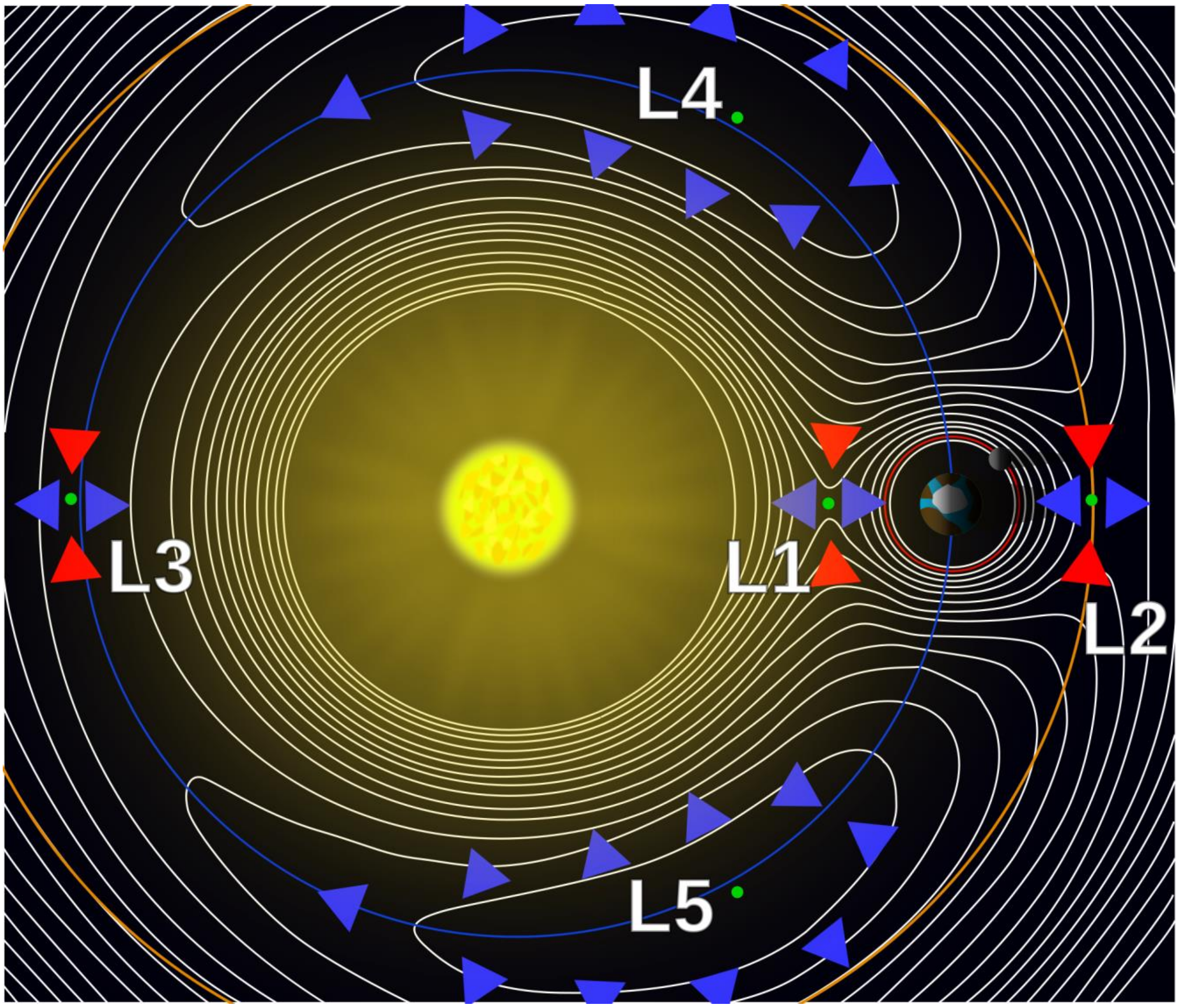
Come abbiamo già detto, il campo ha simmetria sferica. E' quindi utile rappresentare le linee in cui la forza gravitazionale è costante (*linee equipotenziali*). Già possiamo intuire che tali linee saranno delle circonferenze di raggio *r* attorno al corpo centrale. La figura qui accanto ci mostra le linee equipotenziali per un singolo corpo (per esempio la Terra).

Inoltre possiamo citare una proprietà generale molto importante: le superfici equipotenziali sono sempre perpendicolari alle linee di forza.

Se noi ci spostiamo lungo queste linee equipotenziali, non dobbiamo variare l'energia del nostro satellite, per esempio. Infatti la forza gravitazionale non cambia in modulo, e non cambia in modulo nemmeno la velocità con cui ci spostiamo lungo la linea. Ciò significa che non dobbiamo compiere lavoro sul satellite, in altre parole possiamo fare a meno di un motore. Infatti i satelliti non hanno motori, seguendo orbite che giacciono su linee equipotenziali.

Il problema si complica notevolmente se invece di un solo corpo sorgente abbiamo due corpi sorgenti che creano il campo gravitazionale.

Senza addentrarci nella complicata trattazione matematica, possiamo rappresentare le linee equipotenziali per il problema dei due corpi.



Come si può notare, le linee di campo sono molto più complesse delle semplici circonferenze di prima. Questo perché non solo abbiamo il nostro satellite che può muoversi, ma anche i due corpi che generano il campo sono soggetti ad una mutua attrazione.

Tuttavia possiamo fare delle interessanti osservazioni:

1. Nell'approssimazione in cui siamo molto vicini ad un corpo (o all'altro) le linee equipotenziali si riducono ad essere molto simili a quelle del problema del

singolo corpo (vediamo come ci siano linee equipotenziali, e quindi orbite, praticamente circolari nelle vicinanze del Sole e della Terra). Notiamo inoltre come la Luna (giustamente!) percorra un'orbita pressoché circolare su una linea equipotenziale circolare (e la Luna non dispone certo di motori!).

2. Nel caso in cui le distanze dai corpi sorgenti siano paragonabili, le linee si modificano pesantemente, e alcune permettono di percorrere orbite che circolano vicino ad entrambi i corpi (orbite a forma di "arachide").
3. Allontanandosi molto dai due corpi sorgenti del campo, le orbite diventano di nuovo abbastanza "regolari"; a distanze notevoli i due corpi si comportano come uno singolo.

Ma forse la parte più importante è data dai *punti lagrangiani.* Come si nota, ci sono delle zone del campo in cui "non ci sono" linee equipotenziali, per esempio nei punti indicati con L4 ed L5. Tali zone sono delle buche di potenziale, ovvero lì il potenziale gravitazionale diminuisce man mano che ci si avvicina ai punti L4 ed L5, proprio come se fossero delle conche in cui il potenziale è minore. In queste zone è possibile posizionare dei satelliti senza che essi percorrano delle orbite, infatti sono confinati a stare all'interno delle linee chiuse equipotenziali.

E' infatti vero che possiamo percorrere le linee equipotenziali senza avere un motore, è però altrettanto vero che per passare da una linea all'altra occorre compiere del lavoro, ovvero accendere un motore.

Dal grafico si nota quindi come un satellite, posizionato nei punti L4 ed L5, non *possa uscire* dalla "trappola" di potenziale che viene creata: infatti per saltare da una linea all'altra (e quindi allontanarsi dai punti L4 ed L5) dovrebbe compiere lavoro.

Questi punti L4 ed L5 sono di *equilibrio stabile:* anche se il satellite ha una piccola perturbazione esso ritornerà alla posizione di equilibrio.

I punti L4 ed L5 sono di equilibrio in quanto la forza gravitazionale combinata di Sole e Terra è compensata dalla rivoluzione del satellite attorno al Sole (infatti i punti lagrangiani comunque *orbitano* attorno al Sole, tenendosi sempre alla solita distanza dalla Terra), ovvero dalla forza centrifuga.

I punti L1, L2, L3 sono invece *instabili:* anche una piccola perturbazione porta il satellite ad allontanarsi indefinitamente dal punto (e infatti il satellite cadrebbe o verso la Terra o verso il Sole).

Il punto L1 è dato dall'equilibrio fra la forza del Sole e quella della Terra (a ben vedere la Luna orbita molto più all'interno di questo punto!).

I punti L2 ed L3 sono invece il risultato dell'equilibrio fra la forza attrattiva combinata del Sole e della Terra e la forza centrifuga causata dalla rivoluzione del satellite.

Quindi un satellite posto in un punto lagrangiano mantiene sempre la medesima posizione rispetto al Sole e alla Terra, sebbene generalmente la sua posizione cambi nello spazio.

Riportiamo infine un altro bel grafico che rende l'idea dei punti lagrangiani. Immaginate di voler mettere in equilibrio una pallina sulla superficie grigia: dove la posizionereste? Esattamente nei punti lagrangiani del sistema.